## 基础课25 正弦定理与余弦定理

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 正弦定理、余弦定理 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国甲卷（理）  2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理）  2023年全国乙卷（文）  2023年北京卷  2023年天津卷 | ★★★ | 数学运算  逻辑推理  直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，正弦定理、余弦定理是高考常考内容，试题难度中等.一般与三角恒等变换交汇考查，在立体几何、解析几何中解三角形时经常用到.预计2025年高考命题情况变化不大 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、正弦定理和余弦定理

在中，若角，，所对的边分别是，，，为外接圆半径，则

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 定理 | 余弦定理 | 正弦定理 |
| 公式 | ；  ； |  |
| 常见变形 | ；  ； | （1），，；  （2），，；  （3）；  （4），， |

##### 二、在中，已知，和时，解的情况

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 为锐角 | | | 为钝角或直角 | | |
| 图形 |  |  |  |  | | |
| 关系式 |  |  |  |  |  |
| 解的个数 | ⑦一解 | ⑧两解 | ⑨一解 | 一解 | 无解 |

##### 三、三角形常用面积公式

1.表示边上的高.

2..

3.为内切圆半径.

###### 知识 拓展

1.三角形内角和定理：在中， ，变形为.

2.三角形中的三角函数关系

（1）；

（2）；

（3）;

（4）;

（5）.

3.在中，，.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 三角形中三边之比等于相应的三个内角之比.( × )

（2） 在中,“”是“”的充要条件.( √ )

（3） 在的六个元素中，已知任意三个元素可求其他元素.( × )

（4） 当时，为锐角三角形.( × )

2. （易错题）在中，已知，， ，则角的大小为.

**【易错点】**忽略三角形中大边对大角致误.

[解析]由正弦定理，得.因为，所以,又 ，所以 .

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修改编）在中，若 ，，，则( C ).

A. 或 B. . C. D.

[解析]由正弦定理，得，因为三角形的内角和为 ，且，所以, .故选.

4. （人教A版必修改编）已知在中，，，，则.

[解析]由余弦定理得，又，所以.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·北京卷]在中，，则( B ).

A. B. C. D.

[解析]因为，所以由正弦定理得，即，则，故，又 ，所以.故选.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 利用正弦定理、余弦定理解三角形［多维探究］

##### 利用正弦定理解三角形角度1

典例1（1） [2023·天津卷节选]在中，角,,所对的边分别是,,.已知,, ，则.

[解析]由正弦定理，可得，解得.

（2） 记的内角，，的对边分别为，，，，，，则( C ).

A. B. C. D.

[解析]在中，因为，，，

由正弦定理,得，解得.

因为，所以,则可能为锐角也可能为钝角.

所以.故选.



**利用正弦定理解决的两类问题及其解题步骤**

|  |  |
| --- | --- |
| 已知两角及一边，如,, | ①由 ，求出；  ②根据正弦定理，求出边, |
| 已知两边及其中一边所对的角，如,, | ①根据正弦定理计算出，经讨论求；  ②求出后，由 ，求出；  ③再根据正弦定理，求出边 |

【提醒】

1.应用正弦定理求解时容易出现增解或漏解的错误，要根据条件和三角形的限制条件合理取舍；

2.在求角时易忽略角的范围而导致错误，需要根据大边对大角，大角对大边的规则，画图帮助判断.

##### 利用余弦定理解三角形角度2

典例2 [2023·天津卷节选]（1）在中，角,,所对的边分别是,,.已知,, ，则5.

（2）（2023·全国甲卷）在中， ,,，的平分线交于点，则2.

[解析]（1）由，可得，解得或（舍去）.

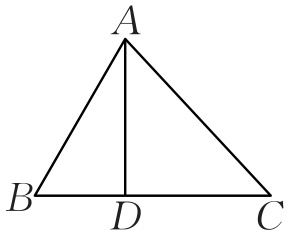
（2）如图所示,记,,，

由余弦定理可得，，

因为，所以，

由，可得 ，

解得.





**利用余弦定理解决的两类问题及其解题步骤**

|  |  |
| --- | --- |
| 已知两边和它们的夹角，如,, | ①根据余弦定理,求出；  ②根据，求出;  ③根据，求出.  求出第三边后，也可用正弦定理求角，这样可以使计算更加便捷，应用正弦定理求角时，为了避开讨论（因为正弦函数在区间上是不单调的），应先求较小边所对的角，它必是锐角 |
| 已知三边 | 可以连续使用余弦定理求出两角，常常是分别求较小两边所对的角，再由，求出第三个角；由余弦定理求出一个角后，也可以根据正弦定理求出第二个角，但仍然是先求较小边所对的角 |

##### 多维训练

1. [2024·陕西联考]设的内角,,的对边分别为,,，若,,，则( C ).

A. B. C. D.

[解析]因为，所以，又因为,，且由正弦定理可得，所以，解得.故选.

2. [2024·宜春模拟]已知的内角,,的对边分别为,,，若，，，则的面积为( C ).

A. B. C. D.

[解析]由余弦定理，可得，又因为，所以，，所以.故选.

#### 考点二 正弦定理、余弦定理的简单应用［多维探究］

##### 判断三角形形状角度1

典例3（1） [2024·安徽统考]在中，已知，且，角是锐角，则的形状是( D ).

A. 直角三角形 B. 钝角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等边三角形

[解析]由，得，根据正弦定理，得，即,因为角是锐角，所以 ,又，且，都为三角形的内角，所以，故为等边三角形，故选.

（2） [2024·甘肃模拟]已知在中,内角,,的对边分别为,,，若，则的形状为( D ).

A. 等腰三角形 B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形 D. 等腰三角形或直角三角形

[解析]由正弦定理、余弦定理及得，

,

所以，即，

则，即,

所以或,所以为等腰三角形或直角三角形.

故选.



**判断三角形的形状主要有以下两种途径**

1.通过正弦定理和余弦定理化边为角，利用三角恒等变换得出三角形内角之间的关系，再进行判断.

2.利用正弦定理和余弦定理化角为边，通过代数恒等变换，求出三边之间的关系,再进行判断.

##### 与面积有关的计算角度2

典例4 [2023·新高考Ⅱ卷]记的内角,,的对边分别为,,，已知的面积为，为的中点，且.

（1）若，求；

（2）若，求,.

[解析]（1）因为在中，为的中点，，，所以，

因为的面积为，所以，解得，

因为在中，，

由余弦定理得，

即，解得，

所以，

，

所以.

（2）在与中，由余弦定理得

整理得，而，则，

由，解得，

而 ，于是，

所以.

##### 与周长有关的计算角度3

典例5 [2022·全国乙卷]记的内角,,的对边分别为,,，已知.

（1）证明：.

（2）若,，求的周长.

[解析]（1）因为，

所以，

所以，

即，

所以.

（2）因为,，所以由（1）得，

由余弦定理可得，

则，所以，

故，所以，

所以的周长为.



**与三角形面积、周长有关问题的解题策略**

1.利用正弦、余弦定理解三角形，求出三角形的相关边、角之后，直接求三角形面积、周长；

2.把面积作为已知条件之一，与正、余弦定理结合求出三角形的其他量；

3.求三角形的周长，常利用余弦定理结合配方法处理，巧用整体代换思想.

##### 多维训练

1. [2024·辽宁模拟]（多选题）已知的内角，，所对的边分别是，，，则下列说法正确的是( ABD ).

A. 若，则

B. 若，则为等边三角形

C. 若，则为等腰三角形

D. 若，则为直角三角形

[解析]对于，因为，，为三角形的内角，由余弦函数的性质可得，此时，根据三角形中大角对大边的原则，有，故正确；

对于，因为，所以,即，

因为,,为三角形的内角，所以，即为等边三角形，故正确；

对于，由，根据正弦定理可得，则，所以或 ，即或，所以为等腰三角形或直角三角形，故错误；

对于，由，根据正弦定理可得，则，所以，因为，所以，则，即为直角三角形，故正确.故选.

2. [2023·全国乙卷]在中，已知 ，，.

（1）求.

（2）若为上一点，且 ，求的面积.

[解析]（1）由余弦定理可得，

，则，，因为,所以.

（2）由三角形面积公式可得，

则.

3. [2022·北京卷]在中，.

（1）求角.

（2）若，且的面积为，求的周长.

[解析]（1）因为，所以，

由已知可得，

可得，因此.

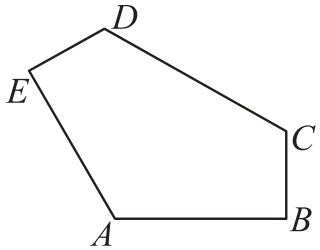
（2）由三角形的面积公式可得，解得.

由余弦定理可得，则，所以的周长为.

#### 考点三 正弦定理、余弦定理的综合应用［多维探究］

##### 平面多边形中的解三角形问题角度1

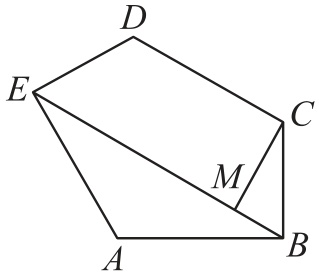
典例6 [2024·辽宁模拟]如图所示，在平面五边形中，已知 ， ， ， ，.



（1）当时，求的长.

（2）当五边形的面积时，求的取值范围.

[解析]（1）如图，连接，由五边形内角和得 ，



又 ， ，,所以 ， ，所以，则四边形为等腰梯形，

在中，由余弦定理得，

所以，过点作于点，

可得，所以.

（2）因为，且五边形的面积，所以，

设，则，

所以,

整理得，解得或，又，即，所以的取值范围是.



**多边形背景解三角形问题的求解思路**

1.把所提供的平面图形拆分成若干个三角形，然后在各个三角形内利用正弦、余弦定理求解；

2.寻找各个三角形之间的联系，交叉使用公共条件，求出结果.解题时，有时要用到平面几何中的一些知识点，如相似三角形的边角关系、平行四边形的性质，要把这些知识与正弦、余弦定理有机结合，才能顺利解决问题.

##### 解三角形中的最值或范围问题角度2

典例7 已知在锐角中，角，，的对边分别为，，，且.

（1）求角；

（2）求的取值范围.

[解析]（1）由结合正弦定理可得，

,因为，所以，

又为锐角三角形，所以.

（2）由（1）得

.

由可得，则，

则,，则，

即的取值范围是.



**解三角形中的最值或范围问题的五种解题技巧**

在解三角形专题中，求其“范围与最值”的问题，一直都是这部分内容的重点、难点.解决这类问题，通常有下列5种解题技巧：

1.利用基本不等式求范围或最值；

2.利用三角函数求范围或最值；

3.利用三角形中的不等关系求范围或最值；

4.根据三角形解的个数求范围或最值；

5.利用二次函数求范围或最值.

先建立所求量（式子）与已知角或边的关系，然后把角或边作为自变量，所求量（式子）的值作为函数值，将原问题转化为求函数的值域问题.这里要利用条件中的范围限制，以及三角形自身范围限制，要尽量把角或边的范围（也就是函数的定义域）找完善，避免结果的范围过大.

##### 解三角形中的证明问题角度3

典例8 [2024·赣州模拟]已知在中，角，，满足.

（1）求证：.

（2）若，求角.

[解析]（1），由正弦定理得，其中，所以，

变形得到，由正弦定理得.

（2）由，得，

即，

所以，，

因为，所以，故 ，解得.

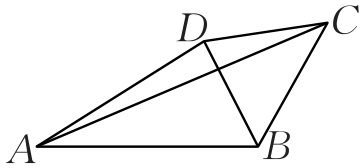


**解三角形中的证明问题的解题策略**

对于解三角形的证明问题，要仔细观察所给的条件和结论之间的关系，发现二者的差异，利用正弦定理、余弦定理及三角恒等变换把条件转换为结论，即证明过程.

##### 多维训练

1. [2024·九江模拟]如图，在中，，为的平分线上一点，且与分别位于边的两侧， ，.



（1）求的面积;

（2）若 ，求的长.

[解析]（1）在中，，即，解得或（舍去），

所以.

（2）因为 ，平分，

所以 ，

又 ，所以 ，

在中，由正弦定理，得, ①

在中，由正弦定理，得, ②

由，得，所以，

又，且，

所以，

将代入②，得，所以.

2. 记的内角，，的对边分别为，，，已知.

（1）若，求角；

（2）求的最小值.

[解析]（1）因为，

即，而，所以.

（2）由（1）知，，所以 ,，

而，

所以，即，

所以

，

当且仅当时取等号，所以的最小值为.

3. 设的内角，，的对边分别为，，，，且为钝角.

（1）求证：.

（2）求的取值范围.

[解析]（1）由及正弦定理，得，

所以，即，

又为钝角，所以，故，

即.

（2）由（1）知，，所以，所以，因为,

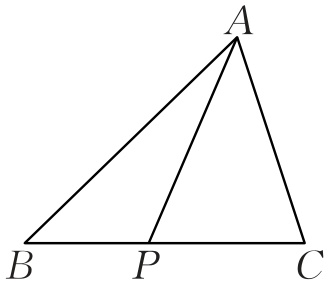
所以，因此，由此可知的取值范围是.

### 拓展教材 深度学习

**“爪”型三角形及应用**

北师大版教材中多次出现基于爪子构型的相关例题,比如教材必修第二册第123页到第124页中有很多这样的例子.爪型三角形是解三角形中非常重要的一种构型,其中包含了很多关于解三角形的重要思想,比如找补角、等面积思想或角平分线定理等.利用上述思想结合正、余弦定理可以推出处理爪型三角形的一些重要结论:：

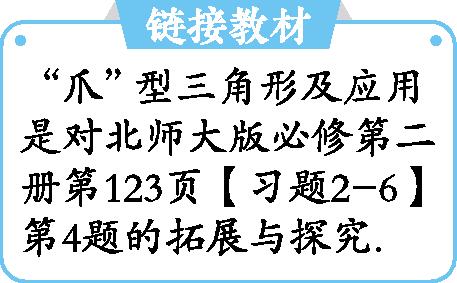
【爪型三角形】爪型三角形的基本几何特征 ，如图.



【结论1】设为的边上的中线，则.

【结论2】设为的内角的平分线，则.

注：此推论是爪型三角形常用的等面积思想.



典例 已知为的边上的动点.

（1）若为边上的中线，求证：.

（2）若为角的平分线，求证：.

[解析]（1）令 ，则 ，在和中，由余弦定理得 ，.

因为为的边上的中线，所以，两式相加可得，,即，

所以，得证.

（2）令 ，则 , ，

则 ， , ,

因为，所以 ，

即，

由余弦定理可得，,

由角平分线相似定理得,代入整理可得，，得证.

深度训练 已知在中，,,.

（1）若为边的中点，求的长；

（2）若为角的平分线，求的长.

[解析]在中，由正弦定理得，，

因为，所以，

因为，

所以，因为，所以，

所以，因为，所以.

由余弦定理得，，所以.

（1）根据（结论1）得，，即，故.

（2）因为为角的平分线，

所以，

所以，

所以，则.